048 010 J. 2186

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

La partie B de ce problème utilise certains résultats de la partie A.

Toutes les matrices de ce problème sont des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$. I est la matrice unité d'ordre n.

A

A.1. Soit $\mathfrak{T}$ la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par : $(x, y) \in \mathfrak{T} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant y$,
et la matrice carrée $T_n(x, y)$ d'ordre $n \geqslant 2$:

$$T_n(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -y & \cdots & -y \\ -x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -y \\ -x & \cdots & -x & 1 \end{bmatrix} \text{ où } (x,y) \in \mathcal{P}$$

a. Pour $(x, y) \in \mathfrak{T}$ et $x \neq y$, prouver :

$$\text{dét } T_n(x, y) = \frac{y(1+x)^n - x(1+y)^n}{y - x}$$

b. Calculer dét $T_n(x, x)$.

c. L'application définie sur $\mathfrak{T}$ par : $(x, y) \longmapsto$ dét $T_n(x, y)$ est-elle continue en $(x_0, x_0) \in \mathfrak{T}$?

A.2.*a.* Dans le cas : $(x, y) \in \mathfrak{T}$ et $x \neq y$, prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que dét $T_n(x, y)$ soit strictement positif est :

$$\frac{x}{(1+x)^n} < \frac{y}{(1+y)^n}, \tag{1}$$

et que la condition : $y \leqslant \dfrac{1}{n-1}$ est seulement suffisante.

b. Prouver :

$$((x, x) \in \mathfrak{T})\ (\text{dét } T_n(x, x) > 0) \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{n-1}\right).$$

A.3.*a.* Calculer les valeurs propres de $T_n(x, x)$ et préciser ses vecteurs propres.
$T_n(x, x)$ est-elle diagonalisable?

A.3.*b.* Dans le cas : $(x, y) \in \mathfrak{T}$ et $x \neq y$, déterminer les valeurs propres réelles ou complexes de $T_n(x, y)$ et montrer que les images de ces valeurs propres appartiennent à un même cercle C que l'on précisera. $T_n(x, y)$ est-elle diagonalisable?

Tournez la page S. V. P.

A.3.c. *Application numérique :* $n = 6$, $x = \frac{1}{8}$, $y = 8$.

Préciser la position d'un diamètre du cercle C et construire, sur la copie, avec la règle et le compas, les images des valeurs propres de $T_6\left(\frac{1}{8}, 8\right)$. On fera une figure où l'unité mesurera 8 mm et on expliquera la construction.

B

● On appelle mineur principal d'ordre k d'une matrice d'ordre n, le déterminant obtenu en supprimant $(n - k)$ lignes et les $(n - k)$ colonnes de même rang.

Exemple : Pour $n > 2$, un mineur principal d'ordre $(n - 2)$ est obtenu en supprimant la ligne i, la colonne i, la ligne j et la colonne j, où $i \neq j$. Un élément de la diagonale principale est un mineur principal d'ordre 1.

● Une matrice carrée *réelle* (t_{ij}) est dite matrice de type $\mathcal{C}$ si on a :

($\mathcal{C}_1$) $\forall (i, j) \in [1, n]^2$, $i \neq j$, $t_{ij} < 0$.

($\mathcal{C}_2$) dét (t_{ij}) strictement positif.

($\mathcal{C}_3$) Les mineurs principaux de *tout ordre* $k \in [1, n - 1]$ sont positifs ou nuls.

B.1.a. Prouver que, pour $0 < x \leqslant y < \frac{1}{n-1}$, la matrice $T_n(x, y)$ de la partie A est une matrice de type $\mathcal{C}$.

B.1.b. Soit $T = (t_{ij})$ une matrice de type $\mathcal{C}$. Démontrer que les éléments de la diagonale principale de T sont strictement positifs.

B.1.c. On note θ un majorant quelconque des éléments diagonaux t_{ii} et on considère la matrice A définie par : $A = \theta I - T$.

λ étant réel, on pose : $U(\lambda) = \lambda I - A = T - (\theta - \lambda) I$.

Démontrer, en utilisant une récurrence sur l'ordre k des mineurs principaux de $U(\lambda)$, que pour $\lambda > \theta$, chaque mineur principal de $U(\lambda)$ est une fonction strictement croissante de λ.

En conclure : dét $U(\lambda) > 0$ pour $\lambda \geqslant \theta$.

B.1.d. Prouver que $U(\lambda)$ est du type $\mathcal{C}$ pour $\lambda \geqslant \theta$ et que A n'a pas de valeur propre réelle supérieure ou égale à θ.

En déduire que $U(\lambda)$ est inversible pour $\lambda \geqslant \theta$.

B.2. On pose $A^0 = I$ et on note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (a_{ij}(k))$.

On pose aussi : $(U(\lambda))^{-1} = (\alpha_{ij})$.

On admettra, sans démonstration, que les hypothèses sur A entraînent que les n^2 séries numériques Σ_{ij} :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2 \quad \Sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{ij}(k)}{\lambda^{k+1}} \text{ convergent pour } \lambda \geqslant \theta.$$

B.2.a. Développer et simplifier :

$$(\lambda I - A) \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} \quad \text{où } m \in \mathbb{N}.$$

B.2.*b*. Démontrer que, pour $\lambda \geqslant 0$, les sommes respectives des n^2 séries numériques Σ_{ij} sont égales à α_{ij} et que les α_{ij} sont tous strictement positifs.

B.3. On considère la matrice T précédente de type $\mathfrak{T}$ et une matrice complexe $S = (s_{ij})$ telle que :

(S_1) : $\forall\ i \in [1, n],\ |s_{ii}| \geqslant t_{ii}$

(S_2) : $\forall\ (i, j) \in [1, n]^2,\ i \neq j,\ |s_{ij}| \leqslant -t_{ij}$

(S_3) : $\forall i \in [1, n]$, s_{ii} réel > 0.

Le majorant θ des t_{ii} (cf § B.1.*c*.) est fixé par : $\theta = \underset{i}{\text{Max}}\,|s_{ii}|$.

Soit les matrices $A = (\theta I - T) = (a_{ij})$ et $B = (\theta I - S) = (b_{ij})$.

B.3.*a*. On pose : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $A^k = (a_{ij}(k))$ et $B^k = (b_{ij}(k))$.

Prouver : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\forall\ (i, j) \in [1, n]^2$, $|b_{ij}(k)| \leqslant a_{ij}(k)$.

B.3.*b*. En déduire que, pour $\lambda \geqslant \theta$, $(\lambda I - B)$ est inversible et que S est donc inversible.

B.3.*c*. On pose $T^{-1} = (\tau_{ij})$ et $S^{-1} = (\sigma_{ij})$.

Démontrer : $\forall\ (i, j) \in [1, n]^2$, $\tau_{ij} \geqslant 0$ et $|\sigma_{ij}| \leqslant \tau_{ij}$.

B.3.*d*. Prouver : $|\det S| \geqslant \det T$.

B.3.*e*. Prouver que le résultat de B3*d*. est vrai si S vérifie seulement (S_1) et (S_2).

B.4. Soit $P = (p_{ij})$ une matrice complexe vérifiant :

$$\forall\ i \in [1, n] \qquad |p_{ii}| \geqslant 1$$

on note $M = \underset{j>i}{\text{Max}}\,|p_{ij}|$ et $m = \underset{j<i}{\text{Max}}\,|p_{ij}|$ et on suppose $0 \leqslant m \leqslant M$.

(on peut s'y ramener en transposant P au besoin).

B.4.*a*. Dans le cas où m est nul, prouver que P est inversible.

Dans le cas : $0 < m < M$, montrer qu'une condition suffisante pour que P soit inversible est :

$$\frac{m}{(1+m)^n} < \frac{M}{(1+M)^n},$$

et que dans le cas : $M = m$, cette condition est : $M < \dfrac{1}{n-1}$.

B.4.*b*. Soit $Q = (q_{ij})$ une matrice complexe dont les éléments de la diagonale principale sont tous non nuls. Déduire du § B.4.*a*. précédent, une condition suffisante pour que Q soit inversible.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail